

Pythagorean triplet

$X^2+Y^2=Z^2$ 의 세변 (X,Y,Z) 로 직각삼각형을 만들며, 이를 피타고라스 정리라고 한다.

$X^2+Y^2=Z^2$ 의 자연수 해를 피타고라스 수 (Pythagorean triplet) 라고 한다.

$X^2+Y^2=Z^2$ 에서 $A=Z-Y$ 과 $B=Z-X$ 일 때, 아래의 식을 얻는다.

$$X=(2AB)^{1/2}+A, Y=(2AB)^{1/2}+B \text{ 과 } Z=(2AB)^{1/2}+A+B.$$

(X,Y,Z) 가 자연수일 때, (A,B) 도 자연수가 됨으로, 위 식의 (X,Y,Z) 는 $(2AB)^{1/2}=k$ 의 모든 피타고라스 수가 된다.

모든 피타고라스 수는 거듭제곱이 될 수 없음을 다음과 같이 증명한다.

$X=(2AB)^{1/2}+A, Y=(2AB)^{1/2}+B$ 과 $Z=(2AB)^{1/2}+A+B$ 에서 $(2AB)^{1/2}=k$ 일 때, 자연수 (X,Y,Z) 인 모든 피타고라스 수를 구하였다.

$c^2=A=Z-Y, 2d^2=B=Z-X$ 과 $2cd=k$ 일 때, $X=2cd+c^2, Y=2cd+2d^2$ 과 $Z=2cd+c^2+2d^2$ 을 얻는다.

모든 피타고라스 수 (X,Y,Z) 에서 (X,Y), (A,B) 와 (c,d) 가 서로소일 때, (Y 또는 X) 는 짝수이고, (X 또는 Y,Z) 는 홀수들이 되며, $XY=2cd(c+d)(c+2d)$ 가 거듭제곱이 될 수가 없으므로, 모든 피타고라스 수는 거듭제곱이 될 수 없는 것이다.

$c=e^m, d=2^{(m-1)}f^m, c+d=e^m+2^{(m-1)}f^m=s^m$ 과 $c+2d=e^m+(2f)^m=t^m$ 과 같이, 만약 어떤 이가 $XY=2cd(c+d)(c+2d)=(2efst)^m$ 과 같은 거듭제곱이 될 수도 있을 것으로 추측을 한다면, 이는 잘못된 일이다.

$X^2+Y^2=Z^2$ 에서, $X=2cd+c^2, Y=2cd+2d^2$ 과 $Z=2cd+c^2+2d^2$ 을 얻었다.

$m>1$ 일 때, $e^m+(2f)^m=t^m$ 에서, $(e^{m/2})^2+\{(2f)^{m/2}\}^2=(t^{m/2})^2$ 을 얻는다.

$(e^{m/2})^2+\{(2f)^{m/2}\}^2=(t^{m/2})^2$ 에서, $e^{m/2}=2gh+g^2, (2f)^{m/2}=2gh+2h^2$ 과 $t^{m/2}=2gh+g^2+2h^2$ 을 같은 방법으로 얻으며, 이 때 $g^2=t^{m/2}-(2f)^{m/2}$ 이고, $2h^2=t^{m/2}-e^{m/2}$ 이다.

(e,f) 과 (g,h) 는 서로 소다.

$e^{m/2}=2gh+g^2, (2f)^{m/2}=2gh+2h^2, t^{m/2}=2gh+g^2+2h^2, e^m=\{2gh+g^2\}^2, (2f)^m=\{2gh+2h^2\}^2, t^m=\{2gh+g^2+2h^2\}^2, e^{1/2}=\{2gh+g^2\}^{1/m}, (2f)^{1/2}=\{2gh+2h^2\}^{1/m}$ 과 $t^{1/2}=\{2gh+g^2+2h^2\}^{1/m}$ 은 자연수들이 된다.

$(e^{m/2})^2+\{(2f)^{m/2}\}^2=(t^{m/2})^2$ 에서, $u=e^{m/2}, v=(2f)^{m/2}$ 과 $w=t^{m/2}$ 일 때, 거듭제곱 수인 (u,v,w) 도 피타고라스 수가 되는 것이다.

이상과 같이, 피타고라스 수 (X,Y,Z) 가 거듭제곱이 된다면, 더 작은 거듭제곱 피타고라스 수 (u,v,w) 가 필요하게 된다. 이와 같이 반복될 수는 없기 때문에 모든 피타고라스 수는 거듭제곱이 될 수가 없는 것이다.

(g,h) 가 (1,1) 일 때, (u,v,w) 는 (3,4,5) 가 되고, (c,d) 는 (9,8) 이 된다.

(c,d) 가 (9,8) 일 때, (X,Y,Z) 는 (225,272,323) 이 된다.

(c,d) 를 구한 바와 같이 다음 단계의 (p,q) 를 구하면 (50625,36992) 가 되며, 이 때의 피타고라스 수는 (6308330625,6482256128,9045146753) 이 되는 것이다.